

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на второй курс, 2017 год

1. [5] Вычислить: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 - x^4} \cdot \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \right)^{-6x^2}$.

2. [5] Найти длину дуги кривой $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3. [5] Для каждого значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ исследовать абсолютную и условную сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{(x - \operatorname{arctg} x) |\sin x|}{x^\alpha \ln^2(1+x)} dx$.

4. [5] Исследовать равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; a)$ и $E_2 = (a; +\infty)$

а) функциональной последовательности $f_n(x) = \sqrt{x} \operatorname{th} \frac{1}{x^{4n^2}}$,

б) функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} \operatorname{th} \frac{1}{x^{4n^2}}$.

5. [5] Укажите матрицу Грама Γ для базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ евклидова пространства, в котором самосопряжённое преобразование φ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$. Для этой матрицы Грама найдите ортонормированный базис, в котором преобразование φ имеет диагональный вид.
